This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

.5.5

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
13 April, 1885.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

4590

Die

Elemente

der

höhern Analysis

neu begründet

durch die endliche Bedeutung des Differentials

und angewendet

auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeit

von

Dr. Georg Recht,
k. Professor an der Ludwigs-Maximilians-Universität
in München.

München, 1855.
Literarisch-artistische Anstalt
der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.

Digitized by Google

3008.55.5
Math 3158.55.3
APR 13 1885
Harvard.

Digitized by Google

Vorwort.

Nachdem die Analysis zu einer wirklichen Wissenschaft herangewachsen war, dachte Niemand mehr an eine Fortsetzung derselben, weil sich weder ein neues Objekt noch eine neue Aufgabe zur Betrachtung darbot. Die Anwendung der Analysis auf Geometrie und Mechanik machte jedoch eine eigenthümliche Betrachtung der Zahlen nothwendig, um diskrete Größen auf stetige anzuwenden, und so entstand die Methode des Untheilbaren, und die Betrachtung des Unendlichkleinen.

Leibnitz und Newton trennten zu gleicher Zeit den so erweiterten Kalkul von der Anwendung, ohne sich klar ihrer Erfindung bewußt zu werden; stritten sich doch ihre Anhänger einerseits um die Priorität, andrerseits darum, ob beide Erfindungen etwas Verschiedenes seyen oder nicht.

Die nachfolgenden Mathematiker waren nun bemüht, das Unendlichkleine aus der Analysis zu verbannen, und konnten dieses nicht anders als dadurch, daß sie das Differential einer jeden Function als Null betrachteten, wodurch dasselbe als selbstständiges Objekt wieder verschwand, und nur mehr der Differentialquotient als eine analytische Zahl, als der besondere Werth des unbestimmten Ausdruckes $\frac{0}{0}$ für jede besondere Function erschien.

Digitized by Google

Erst Lagrange zeigte, daß das Differential einer Function selbst eine gewisse Function sey, und in so ferne jene ein Objekt bezeichnet, auch diese ein solches darstelle, wodurch nicht bloß der neue Kalkul zu einer selbstständigen Wissenschaft erhoben, sondern auch seine Anwendung in klares Licht gestellt wurde. Dessen ungeachtet hat die neue Lehre bei den Mathematikern wenig Anklang gefunden, was offenbar nur in der Form der Darstellung von Lagrange und den nöthigen Hilfsmitteln zu suchen ist.

Es fehlte nämlich noch immer der Begriff des neuen Lehrgebäudes und sein Zusammenhang mit der Analysis, die jetzt die Benennung der niedern Analysis erhielt, und deßwegen hat bisher die Grenzmethode noch immer den Vorzug behauptet.

Mein Bestreben war nun, den Begriff der höhern Analysis festzustellen, und ihre Lehren auf den natürlichen Entwicklungsgang ohne Beihülfe der Gleichungen und besonderer Lehrsätze zurückzuführen.

Daß das Gelingen dieses Strebens von einem unendlichen wissenschaftlichen Werthe ist, unterliegt keinem Zweifel, in wie ferne mir aber die Lösung dieser Aufgabe gelungen ist, mögen Sachverständige mit Nachsicht beurtheilen.

München, im Januar 1855.

Dr. Recht.

Digitized by Google

Die Zahl, der Ausdruck einer bestimmten Menge einer Einheit, hat zwei Eigenschaften, nämlich: die Fähigkeit der Vermehrung und Verminderung.

Die erstere dieser beiden Eigenschaften gibt die durch Vermehrung zusammengesetzte Zahl oder die Summe, während die andere die Differenz oder die durch Verminderung zusammengesetzte Zahl gibt, woraus die negative Größe als die erste formelle Zahl hervorgeht.

Eine formelle Zahl ist eine Zahl, die durch eine andere reelle von der natürlichen Zahleneinheit gebildete ersetzt werden kann. So kann z. B. — d ersetzt werden durch d, daher ist — d eine formelle Zahl und ihre Einheit ist Minuseins, während die Einheit ihrer Substitutionszahl Eins, die Einheit der natürlichen Zahlen ist. Durch den Gebrauch der negativen Zahl geht die Differenz in eine Summe über, und wir können daher diese als die erste und die negative Zahl als die zweite zusammengesetzte Zahl betrachten.

Die dritte zusammengesetzte Zahl ist das Product, das aus der Addition von gleichen Zahlen oder aus der fortgesetzten Addition einer und derselben Zahl entsteht, und daher eine Summe von gleichen Gliedern in abgekürzter Form ist.

Die vierte zusammengesetzte Zahl geht aus der Subtraction von gleichen Zahlen oder aus der fortgesetzten Subtraction einer

Digitized by Google

und derselben Zahl hervor. Da die Forderung bezüglich dieser Zahl eine zweifache ist, indem man entweder die Menge der Subtractionen oder den Werth der Subtractionszahl sucht, so entstehen streng genommen aus der Subtraction von gleichen Zahlen zwei zusammengesetzte Zahlen, die aber wegen einer Eigenschaft des Productes, wornach man Grundzahl und Coefficient verwechseln darf, in eine einzige, nämlich in den Bruch als vierte zusammengesetzte Zahl sich vereinigen. Der Bruch ist die zweite formelle Zahl, und kann ersetzt werden durch seinen Zähler oder durch ein Multiplum seines Zählers mit Veränderung dessen Einheit. Die Einheit des Bruches ist ein Theil der Einheit der natürlichen Zahlen. Nicht nur die Subtraction von gleichen Zahlen, sondern schon die Subtraction im Allgemeinen führt nur deßwegen auf eine einzige zusammengesetzte Zahl, weil die Glieder einer Summe zugleich deren Theile sind, daher verwechselt werden dürfen.

Die fünfte zusammengesetzte Zahl, die Potenz, ist ein Product aus lauter gleichen Faktorn in abgekürzter Form.

Gegenüber der Potenz, die aus der wiederholten Multiplication mit einer und derselben Zahl entsteht, steht die Forderung der Division von gleichen Zahlen, oder der fortgesetzten Division mit einer und derselben Zahl, und diese ist wieder eine doppelte, je nachdem man den Werth der Subtractionszahl, die Wurzel genannt wird, oder die Menge der Subtractionen, die wir Exponentenzahl heißen wollen, verlangt ist, wodurch die sechste und siebente zusammengesetzte Zahl entsteht.

Außer diesen sieben zusammengesetzten Zahlen, die eine nothwendige aber auch zugleich die ganze Folge der beiden Eigenschaften der Zahl sind, gibt es keine mehr; sie bilden daher das ganze Objekt der Analysis.

Digitized by Google

Die Aufgabe der Analysis kann nun keine andere seyn, als die Eigenschaften dieser sieben Functionen — der technische Ausdruck für zusammengesetzte Zahl — zu untersuchen. Sie hat demnach z. B. beim Producte zu untersuchen:

1) Die Entstehung, und damit die nöthige Bezeichnung und Benennung einzuführen; z. B.

$$a + a + a = 3a;$$

2) die Bedeutung, wodurch das Product wieder auf eine Summe zurückgeführt wird; z. B.

$$5a = a + a + a + a + a;$$

3) die Eigenschaften des Productes in so ferne dasselbe allein betrachtet wird, und die sich auf den Satz reduziren, daß man in einem Producte Grundzahl und Coefficient vertauschen d. h. ihre Einheiten verwechseln darf; z. B.

$$ab = ba; \quad 3.4\,\text{fl.} = 4.3\,\text{fl.};$$

4) die Eintheilung der Producte ihrer Form nach in einfache und zusammengesetzte, wodurch alle möglichen zusammengesetzten Producte sich ergeben, nämlich:

1) $a(b+c)$
2) $a(-b)$
3) $(a+b)(c+d)$
4) $(-a)(-b)$;

5) die Eigenschaften der zusammengesetzten Producte, wornach diese in Summen von einfachen Producten übergehen; nämlich:

1) $a(b+c) = ab+ac$
2) $a(-b) = -ab$
3) $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
4) $(-a)(-b) = ab$;

6) die Eigenschaften der Producte in ihren Verbindungen oder den Gebrauch derselben in den verschiedenen Operationen.

Digitized by Google

Dazu zerfallen die Producte in folgende Klassen:

1) ab und cd
2) ab „ ac
3) ab „ ab.

Die Verbindungen selbst sind:

1) $ab + cd$ keine Veränderung
2) $ab + ac = a(b + c)$
3) $\left\{\begin{array}{l} ab + ab = a(b + b) = a(2b) \\ ab + ab = b(a + a) = b(2a) \\ ab + ab = 2(ab) \end{array}\right.$
4) $ab - cd$ keine Veränderung
5) $ab - ac = a(b - c)$
6) $\left\{\begin{array}{l} ab - ab = a(b - b) = a.0 \\ ab - ab = b(a - a) = b\ 0 \\ ab - ab = 0 \end{array}\right.$
7) $(ab)\,(cd) = abcd$
8) $(ab)\,(ac) = aabc$
9) $(ab)\,(ab) = aabb.$

Obige sechs Fragen hat nun die Analysis für sämmtliche sieben Functionen zu beantworten, und in der Beantwortung von diesen zweiundvierzig Fragen besteht die ganze Aufgabe der niedern Analysis.

Sämmtliche Probleme der niedern Analysis sind auch direkt gelöst mit Ausnahme der Bedeutung der Wurzel oder des Werthes der Divisionszahl bei wiederholter Division, und sekundär des Werthes der Exponentenzahl, wofür wir bisher nur indirekte Lösungen kennen. So z. B. bedeutet

$$\sqrt[3]{5}$$

diejenige Zahl, mit der sich fünf dreimal dividiren läßt.

Digitized by Google

Eine Zahl findet ihre Bedeutung in der Menge ihrer Einheit; da aber die Einheit der Irrationalzahl, was die Wurzeln im Allgemeinen sind, ein unendlich kleiner Theil von Eins ist, d. h. die Irrationalzahlen durchaus nicht als Mengen von Eins oder einem Theile von Eins betrachtet werden können, und wir nicht im Stande sind, mit einer unendlich kleinen Einheit zu zählen, so wird für die Ermittlung der Bedeutung der Wurzel immer nur ein indirektes auf eine Eigenschaft dieser Zahl gegründetes Verfahren möglich seyn, wodurch der Werth annähernd bestimmt wird.

Aus der Unmöglichkeit der Lösung dieser Aufgabe, um mich so auszudrücken, folgt, daß auch die Frage nach der Menge der Divisionen bei fortgesetzter Division mit einer und derselben Zahl oder die Ermittlung der Bedeutung der Exponentenzahl nur eine indirekte Lösung finden kann. So z. B. soll

$$\frac{\text{Exp } 5}{3}$$

heißen: Wie oft läßt sich fünf durch drei dividiren.

Wir wollen nun statt weiterer Erklärung diese Forderung wirklich durchführen, und das Resultat durch die Einheiten:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16} \text{ u. s. w.}$$

ausdrücken.

Dazu ist nun:

1) $\sqrt{3} = 1.732051$

2) $\sqrt[4]{3} = 1.316074$

3) $\sqrt[8]{3} = 1.147203$

4) $\sqrt[16]{3} = 1.071076$

5) $\sqrt[32]{3} = 1.034929$

Digitized by Google

6) $\sqrt[64]{3} = 1.017315$

7) $\sqrt[128]{3} = 1.008620$

8) $\sqrt[256]{3} = 1.004301$

9) $\sqrt[512]{3} = 1.002148$

10) $\sqrt[1024]{3} = 1.001074$

Nachdem nun obige Brüche als Theilfaktorn der Zahl Drei hergestellt sind, gehen wir an die wirklichen Divisionen, und erhalten:

1) 3.000000 | 5.000000 | = 1.666667
2) 1.732051 | 1.666667 | = 0.000000
3) 1.316074 | 1.666667 | = 1.266394
4) 1.147203 | 1.266394 | = 1.103897
5) 1.071076 | 1.103897 | = 1.030643
6) 1.034929 | 1.030643 | = 0.000000
7) 1.017315 | 1.030643 | = 1.013101
8) 1.008620 | 1.013101 | = 1.004444
9) 1.004301 | 1.004444 | = 1.000143
10) 1.002148 | 1.000143 | = 0.000000
11) 1.001074 | 1.000143 | = 0.000000
12) 1.000537 | 1.000143 | = 0.000000
13) 1.000268 | 1.000143 | = 0.000000
14) 1.000134 | 1.000143 | = 1.000009

daher ist:

$$\frac{\text{Exp}}{3}\,5 = 1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{0}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{256} + \\ + \tfrac{0}{512} + \tfrac{0}{1024} + \tfrac{0}{2048} + \tfrac{0}{4096} + \tfrac{1}{8192} \cdots$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
\tfrac{1}{4} &= 0.25\\
\tfrac{1}{8} &= 0.125\\
\tfrac{1}{16} &= 0.0625\\
\tfrac{1}{64} &= 0.015625\\
\tfrac{1}{128} &= 0\,007812\\
\tfrac{1}{256} &= 0.003906\\
\tfrac{1}{8192} &= 0.000122\\
\hline
&\quad 1.465
\end{aligned}
$$

$\frac{\text{Exp}}{3}\,5 = 1.465$ oder, wenn

$3^x = 5$, so ist

$x = 1.465$

Zufällig sind in diesem Beispiele die einzelnen Divisionen nur Einmal oder Nullmal möglich; betrachten wir daher noch folgendes Beispiel:

$3^x = 20.51556$, so ist

1) $3.00000 \mid 20.51556 \mid = 6.83852$
2) $3.00000 \mid 6.83852 \mid = 2.27951$
3) $1.73205 \mid 2.27951 \mid = 1.31607$
4) $1.31607 \mid 1.31607 \mid = 1.00000$

$$x = 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 2.75 = 2\tfrac{3}{4}.$$

Ist die Bedeutung einer Exponentenzahl in den Einheiten

$$\tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{100},\ \tfrac{1}{1000} \ldots\ldots$$

verlangt, so müßte man

$$\overset{10}{V}3,\ \overset{100}{V}3,\ \overset{1000}{V}3 \text{ u. s. w.}$$

herstellen, wofür ich eine ganz einfache Operation, die ich bei einer andern Gelegenheit mittheilen werde, gefunden habe, und mit diesen

Digitized by Google

Resultaten dividiren. Leichter wäre das Verfahren in einem andern z. B. dem Duodezimalzahlensysteme.

Da sich gemäß der Bedeutung eines Bruches, wornach er anzeigt, wie oft sich der Nenner oder Theile desselben vom Zähler abziehen lassen, jeder Bruch in Partialbrüche von beliebigen Einheiten zerlegen läßt, so läßt sich jede Wurzel auch auf jede andere z. B. die Quadratwurzel zurückführen; nämlich:

da $\frac{1}{3} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots$ so ist z. B.

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[4]{5} \asymp \sqrt[16]{5} \ldots = \sqrt{\sqrt{5}}\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}} \ldots$$

Wir sehen daher, daß die Bedeutung oder der Werth einer Exponentenzahl nicht gefunden wird ohne zuvor den Werth der einen oder andern Wurzel, die die Wahl der Einheiten bestimmt, zu kennen.

Die Exponentenzahl gestattet nun eine ganz andere Definition der Zahlen außer der obigen, wornach jede Zahl eine bestimmte Menge einer Einheit ist; gemäß dieser Zahl ist nämlich jede Zahl ein Product aus lauter Zweier oder Dreier u. s. w. und die Exponenten erhalten jetzt den Namen Logarithmen. Für den praktischen Gebrauch betrachtet man gewöhnlich alle Zahlen als Potenzen von Zehn, und ist z. B.

$$10^x = 3$$

so heißt dieses nichts anderes, als: Drei ist ein Product aus lauter Zehner, und man sieht leicht ein, daß

$$x \text{ oder } \log 3$$

nach Obigem gefunden werden kann, indem man nur zu suchen braucht, wie oft sich

$$3 \text{ durch } 10$$

dividiren läßt.

Es ist nämlich:

Digitized by Google

$$10^{\frac{1}{10}} = 1.25893$$

$$10^{\frac{1}{100}} = 1.02329$$

$$10^{\frac{1}{1000}} = 1.00231$$

Die Divisionen selbst geben nun folgende Resultate:

$$10 \mid 3 \mid = 0$$

1.25893	3.00000	= 2.38298	0.4
1.25893	2.38298	= 1.89287	
1.25893	1.89287	= 1.50356	
1.25893	1.50356	= 1.19432	

1.02329	1.19432	= 1.16715	0.07
1.02329	1.16715	= 1.14059	
1.02329	1.14059	= 1.11464	
1.02329	1.11464	= 1.09026	
1.02329	1.09026	= 1.06545	
1.02329	1.06545	= 1.04121	
1.02329	1.04121	= 1.01752	

1.00231	1.01752	= 1.01518	0.007
1.00231	1.01518	= 1.01384	
1.00231	1.01384	= 1.01151	
1.00231	1.01151	= 1.00918	
1.00231	1.00918	= 1.00686	
1.00231	1.00686	= 1.00455	
1.00231	1.00455	= 1.00123	

Digitized by Google

daher ist

$$\log 3 = 0.477.$$

Die Zahl 10 als Basis des Logarithmensystemes bietet wegen ihres Zusammenhanges mit dem Zahlensysteme für die Berechnung der Logarithmen noch eine andere Betrachtungsweise dar.

Es ist nämlich

$$10^{0.4771213} = 3.$$

Nimmt man nun gemäß der Bedeutung eines Bruches

$$\frac{1}{10000000}$$

als Einheit an, so ist

$$10^{4771213} = 3^{10000000}.$$

Da aber jede Division mit 10 den Dividend um Eine Zifferstelle vermindert, so ist aus Obigem ersichtlich, daß

$$3^{10000000}$$

mit 4771214 Zifferstellen geschrieben wird; wenn man daher umgekehrt weiß, mit wie viel Zifferstellen

$$3^{10000000}$$

geschrieben wird, so gibt diese Zahl den

$$\log 3$$

auf sieben Dezimalstellen.

Um nun z. B. die Logarithmen der fünfziffrigen Zahlen auf sieben Dezimalen zu berechnen, hat man nur zu suchen, aus wie viel Zifferstellen die zehnmillionste Potenz dieser Zahlen besteht.

Will man z. B.

$$\log 39811$$

auf Eine Dezimalstelle finden, so ist dieser die Menge der Zifferstellen von 39811^{10}; diese ist von $3^{10} . 10^{40} = 46$, daher

$$\log 39811 = 4.6.$$

Digitized by Google

Ich habe über die Aufgabe: die Menge der Zifferstellen einer Potenz irgend einer Zahl zu finden, erfolgreiche Untersuchungen angestellt, und behalte die Mittheilung derselben einer andern Gelegenheit vor.

Auf den ersten Blick nun scheint mit der Lösung der erwähnten zweiundvierzig Fragen, von denen bei der Summe und der negativen Zahl überdieß noch mehrere in Eine zusammenfallen die gesammte Analysis erschöpft zu seyn, indem jedes einzelne Objekt dem ganzen Umfange nach betrachtet ist, d. h. indem Begriff und Eigenschaften aller zusammengesetzten Zahlen entwickelt sind, es ist daher nicht abzusehen, wie eine höhere Analysis d. h. eine weitere Fortsetzung der Analysis möglich seyn sollte.

Betrachtet man indeß die Eigenschaften mehrerer Objekte, so werden dieselben immer spezielle und allgemeine seyn, und da in der niedern Analysis nur die besondern Eigenschaften der zusammengesetzten Zahlen betrachtet wurden, so ist noch die Betrachtung der allgemeinen Eigenschaften der Functionen übrig, und darin besteht die Aufgabe der höhern Analysis, während das Objekt dasselbe wie das der niedern Analysis ist.

Zur nähern Begründung der Aufgabe der höhern Analysis wollen wir nun die Resultate der niedern Analysis einer genauen Durchsicht würdigen.

Schon aus dem Obigen geht hervor, daß die Summe die vornehmste Zahl der Analysis ist, indem alle andern Zahlen von ihr abstammen.

Schreiben wir nun z. B. die Summe

$$a + b$$

auf folgende Art:

$$a + 1b + 0b^2 + 0b^3 \ldots .$$

Digitized by Google

so nennen wir diese Summe eine geordnete Summe und b die Ordnungszahl. Die allgemeine Form der geordneten Summe mit der Ordnungszahl

x

ist daher:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$$

und wir verstehen unter dem Begriffe der geordneten Summe diejenige Summe, deren Glieder nach den Potenzen einer und derselben Zahl, die man die Ordnungszahl nennt, fortschreiten.

Jede solche Summe, die eben so gut aus einem einzigen Gliede als aus unendlich vielen Gliedern bestehen kann, nennen wir eine Reihe.

Die unmittelbare Folge dieses Begriffes ist, daß jede Potenz der Ordnungszahl nur in einem einzigen Gliede der Reihe vorkommt, und die Coefficienten dieser Potenzen die Ordnungszahl nicht enthalten, d. h. von dem Werthe der Ordnungszahl unabhängig sind.

Betrachten wir nun beispielweise folgende Probleme der niedern Analysis:

1) $(a + bx + cx^2)(d + ex + fx^2 + gx^3) =$

$$= ad + \begin{vmatrix} ae \\ bd \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} af \\ be \\ cd \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} ag \\ bf \\ ce \end{vmatrix} x^3 + \begin{vmatrix} bg \\ cf \end{vmatrix} x^4 + cgx^5$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

2) $$\frac{a + bx + cx^2 \ldots\ldots}{d + ex + fx^2 \ldots\ldots} =$$

$$= \frac{a}{d} + \frac{bd - ae}{d^2} x + \frac{cd^2 - adf - bde + ae^2}{d^3} x^2 \ldots$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$$

Digitized by Google

3) $(a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots)^n =$

$$= a^n + na^{n-1}bx + na^{n-1}c \left| x^2 + na^{n-1}d \right.$$
$$\left. \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 \right| \left. \begin{matrix} n(n-1)a^{n-2}bc \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \end{matrix} \right| x^3 \ldots$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$$

4) $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots\ldots$

wornach auch wird:

$$\log(a + bx + cx^2 \ldots.) = A + Bx + Cx^2 \ldots.$$

5) $a^x = 1 + \frac{\log a}{1}x + \frac{\log^2 a}{1.2}x^2 + \frac{\log^3 a}{1.2.3}x^3 \ldots.$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$

6)
$$\left\{ \begin{matrix} \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots. \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots. \end{matrix} \right.$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$

7) $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x \ldots.$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$

so ist dadurch der Satz gerechtfertigt, daß alle Functionen sich umwandeln lassen in Summen geordnet nach den Potenzen einer in der Function vorkommenden Zahl, oder einer Zahl, die von einer solchen abhängig ist; und darin besteht die erste und zugleich die vorzüglichste allgemeine Eigenschaft aller zusammengesetzten Zahlen.

Betrachten wir nun die geordnete Summe gleichsam als eine neue zusammengesetzte Zahl, oder als die allgemeinste Zahl, so

Digitized by Google

erhalten wir damit das Objekt der höhern Analysis, und es ist demnach die höhere Analysis die Wissenschaft von den allgemeinen Eigenschaften der zusammengesetzten Zahlen, oder auch die Wissenschaft von den Eigenschaften der allgemeinen Zahl.

Ehe wir nun an die Begründung der höhern Analysis gehen, wollen wir theils um unserer Schrift die nöthige Vollständigkeit zu geben, theils weil mehrere der obigen Probleme in den gewöhnlichen Lehrbüchern der niedern Analysis nicht abgehandelt sind, von den oben angeführten sieben Aufgaben die fünf letztern einer besondern Betrachtung unterstellen, jedoch in der Art, daß wir den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2.}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots .$$

voraussetzen.

ad 3) $(a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots .)^n =$

$= [a + (bx + cx^2 + dx^3 \ldots .)]^n =$

$= a^n + na^{n-1}(bx + cx^2 + dx^3 \ldots .) +$

$+ \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(bx + cx^2 \ldots .)^2 +$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(bx + cx^2 + dx^3 \ldots)^3 \ldots =$

$$= a^n + na^{n-1}b\left|x + na^{n-1}c \;\middle|\; \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right|x^2 + na^{n-1}d \;\middle|\; n(n-1)a^{n-2}bc \;\middle|\; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3\Big|x^3.$$

$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots .$

Digitized by Google

ad 4) $a^x = y$; $x = \log y$ oder

$$(1 + a - 1)^x = (1 + y - 1)$$

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n$$

wo n eine beliebige Zahl ist. Aus Obigem geht nach dem binomischen Lehrsatze hervor:

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{1.2}(a-1)^2 +$$

$$+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1.2.3.}(a-1)^3 \ldots\ldots$$

$$= 1 + n(y-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(y-1)^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(y-1)^3 \ldots\ldots$$

Oder:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{1.2}(a-1)^2 + \ldots\ldots$$

$$= (y-1) + \frac{n-1}{1.2}(y-1)^2 + \ldots\ldots$$

Oder da die Glieder mit n ohne Einfluß sind, sich daher auf beiden Seiten aufheben:

$$x(a-1) - \tfrac{1}{2}x(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}x(a-1)^3 \ldots\ldots =$$

$$= (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 \ldots\ldots$$

$$xA = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 \ldots\ldots$$

daher

x der $\log y = \frac{1}{A}(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 \ldots$ und

$$A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^2 \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Setzt man nun für y den Ausdruck $(1+Z)$, so ist

$$\log(1+Z) = \frac{1}{A}(Z - \tfrac{1}{2}Z^2 + \tfrac{1}{3}Z^3 - \tfrac{1}{4}Z^4 \ldots\ldots),$$

wo $\frac{1}{A}$ eine beliebige Zahl ist, von der Basis des Systemes abhängt, und der Modul desselben heißt.

Setzt man $\frac{1}{A} = 1$, so heißen die Logarithmen die natürlichen, und es ist

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\ldots \text{ und}$$
$$A = \log a. \text{ *)}$$

Ebenso ist

$$\log(a + bx + cx^2 \ldots\ldots) = \log(1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 \ldots\ldots)\, a$$

$$= \log a + (\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 \ldots\ldots) - \tfrac{1}{2}(\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 \ldots\ldots)^2 \ldots\ldots$$

$$= \log a + \left|\begin{array}{ll} \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} & x^2 + \frac{d}{a} \\ -\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} & -\frac{bc}{a^2} \\ & +\tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} \end{array}\right| x^3 \ldots\ldots$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$$

ad 5) $a^x = y$

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n$$

---

*) Wir wollen unter log immer die natürlichen Logarithmen verstehen, deren Basis wir mit e bezeichnen.

Digitized by Google

$$(1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a-1)^2 \ldots\ldots)^x = y^n$$

$$(1 + An + Bn^2 + Cn^3 \ldots\ldots)^{\frac{x}{n}} = y$$

$$1 + \frac{x}{n}(An + Bn^2 + Cn^3 ..) + \frac{\frac{x}{n}(\frac{x}{n}-1)}{1.2}(An + Bn^2 ..)^2 = y$$

$$1 + x(A + Bn + Cn^2 ..) + \frac{x(x-n)}{1.2}(A + Bn + Cn^2 ..)^2 = y$$

und da die Glieder mit n ohne Einfluß sind, daher auch

$$n = o$$

gesetzt werden kann, so ist

$$1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3} \ldots\ldots = y$$

oder, da $y = a^x$ und $A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots\ldots$

$$a^x = 1 + \frac{A}{1}x + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}x^3 \ldots\ldots$$

wo

$$A = \log a \text{ oder } (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 \ldots\ldots$$

bedeutet, daher

$$a^x = 1 + \frac{\log a}{1}x + \frac{\log^2 a}{1.2}x^2 + \frac{\log^3 a}{1.2.3}x^3 \ldots\ldots$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots *)$$

Wir wollen solche Potenzen, in denen die verlangte Ordnungszahl im Exponenten steht, Exponentialfunctionen nennen.

---

*) Diese beiden Probleme sind aus den Schriften von Lagrange.

Digitized by Google

ad 6) Jeder Zahl entsprechen zwei Zahlen, von denen die Summe der Quadrate gleich Eins ist; diese beiden Zahlen als Functionen ihrer Stammzahl wollen wir den Sinus und den Cosinus dieser Zahl heißen, und zwar wollen wir diejenige Function, die mit der Grundzahl steigt und fällt, ihren Sinus, die andere ihren Cosinus nennen, so daß, wenn jene Function gleich ist Null für die Grundzahl Null, diese gleich Eins wird.

Die Function „Sinus dividirt durch Cosinus" wollen wir Tangente der Grundzahl nennen, während diese Functionen überhaupt Modular-Functionen heißen sollen. Bei besonderer Beziehung zum Kreis heißen sie Kreisfunctionen.

Da nun nach unserm Begriffe

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1 \text{ daher}$$

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\ (\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = \varphi^m \varphi^{-m}$$

so haben wir einen Ausdruck, in welchem zwei beliebige Zahlen stehen; nehmen wir daher an:

1) $m = x\sqrt{-1}$, und

2) $$\begin{cases} \cos x + \sqrt{-1}\ \sin x = \varphi^{x\sqrt{-1}} \\ \cos x - \sqrt{-1}\ \sin x = \varphi^{-x\sqrt{-1}} \end{cases}$$

so ist φ eine reelle und constante Zahl, deren Werth sich auf folgende Art ergibt:

$$\cos x = \frac{\varphi^{x\sqrt{-1}} + \varphi^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{\log^2 \varphi}{1.\ 2}\, x^2 +$$

$$+ \frac{\log^4 \varphi}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\, x^4 \ldots$$

Digitized by Google

$$\sin x = \frac{\varphi^{x\sqrt{-1}} - \varphi^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{\log \varphi}{1} x -$$

$$- \frac{\log^3 \varphi}{1.2.3} x^3 + \frac{\log^5 \varphi}{1.2.3.4.5} x^5 \ldots$$

Da nun für einen gewissen Werth von x nämlich für einen unendlich kleinen

$$\sin x = x \text{ und}$$
$$\cos x = 1$$

werden muß, so muß

$$\log \varphi = 1$$
$$\varphi = e \text{ oder}$$

der Basis der natürlichen Logarithmen gleich seyn, und es ist

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \ldots$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

Digitized by Google

ad 7) Aus obigen Ausdrücken folgt:

$$x\sqrt{-1} = \log(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = \log(1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x)\cos x$$

$$= \log\cos x + (\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x) - \tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x)^3 \ldots$$

$$-x\sqrt{-1} = \log\cos x - (\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x) - \tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x)^2 - \tfrac{1}{3}(\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,x)^3 \ldots$$

$$+ \qquad - \qquad + \qquad + \qquad +$$

$$x = \mathrm{tg}\,x - \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \tfrac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \tfrac{1}{7}\mathrm{tg}^7 x \ldots\ldots *)$$

Setzt man $\mathrm{tg}\,x = y$ so nennt man x den Bogen, dessen Tangente y ist, und setzt

$$x = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = y), \text{ daher ist}$$

$$\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = y) = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 \ldots\ldots$$

Nachdem durch vorliegende Entwicklungen die obige Behauptung bezüglich der allgemeinen Eigenschaft der zusammengesetzten Zahlen gleichsam erwiesen ist, ist nur mehr zu zeigen, daß die allgemeine Form der geordneten Summe wirklich

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$$

sey.

*) Die Entwicklung der Ausdrücke in 6 mithin auch in 7 gilt vermöge der gemachten Annahmen nur für Kreisfunctionen.

Da man für die Ordnungszahl irgend eine Summe oder ein Produkt oder eine Potenz von einer neuen Ordnungszahl, deren Abhängigkeit von der ursprünglichen durch ein Glied, oder einen Coefficienten oder einen Exponenten bestimmt ist, setzen kann, so

Digitized by Google

geht jede andere denkbare Form einer geordneten Summe in obige über, weßwegen diese das Criterium der Allgemeinheit hat.

Durch diese Rundschau im Gebiete der niedern Analysis haben wir die Aufgabe oder wenn wir wollen Objekt und Aufgabe mithin den vollständigen Begriff der höhern Analysis gewonnen.

Folgerecht würde nun, nachdem das Objekt der höhern Analysis entstanden ist, die erste Aufgabe darin bestehen, die Bedeutung einer geordneten Summe zu entwickeln, welche Aufgabe unter dem Titel der Summirung der Reihen bekannt ist.

So schätzbare Arbeiten wir auch über diese Aufgabe besitzen, und so umfangreich die Litteratur in dieser Beziehung ist, so können wir doch dieselbe als vollkommen ungelöst betrachten, und es dürfte noch lange dauern bis ein Reformator Licht in dieses weite Dunkel bringt.

Mit dieser Aufgabe fallen aber auch fast alle übrigen Untersuchungen der geordneten Summe weg, oder verlieren sich in Spezialitäten.

Um nun Objekt und Aufgabe desjenigen Theiles der höhern Analysis zu entwickeln, den man unter den Benennungen Differential- und Integral-Rechnung begreift, haben wir zuerst den Begriff der sogenannten neuen Function zu entwickeln.

Setzt man in einer Function an die Stelle der zur Ordnungszahl bestimmten Zahl, die wir jetzt die Variable der Function nennen wollen, eine Summe, bestehend aus der Variabeln und einer beliebigen andern Zahl, die wir den Zuwachs der Variabeln heißen, so erhält man die neue Function, der gegenüber die anfangs gegebene Function die primitive genannt wird.

Die neue Function ist genau dieselbe wie die primitive und nur dem Werthe nach davon verschieden.

Digitized by Google

Wenden wir nun die allgemeine Eigenschaft der zusammengesetzten Zahlen auf die neue Function an, so erhalten wir folgenden Satz:

Jede neue Function läßt sich in eine Summe geordnet nach den Potenzen des Zuwachses umwandeln.

Bezeichnen wir die primitive Function mit $f(x)$, wobei x die Variable bedeutet, und den Zuwachs der Variabeln mit h, so ist die neue Function: $f(x+h)$, und wir erhalten:

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 \ldots$$

Die nach den Potenzen des Zuwachses der Variabeln einer Function geordnete Summe ist das Objekt des Differential- und Integral-Kalkuls, während ihre Aufgabe im Allgemeinen darin besteht, die Eigenschaften dieser Summe zu untersuchen.

Nun wissen wir, daß

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots;$$

setzt man an die Stelle von x die Summe $x+h$, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h) = a &+ bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots \\ &bh + 2cxh + 3dx^2h + 4ex^3h \ldots\ldots \\ &ch^2 + 3dxh^2 + 6ex^2h^2 \ldots \\ &dh^3 + 4exh^3 \ldots \\ &eh^4 \ldots \\ &\ldots \\ &\cdot \end{aligned}$$

oder wenn man nach den Potenzen von h ordnet:

$$\begin{aligned} f(x+h) = (a &+ bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots) + \\ &+ (b + 2cx + 3dx^2 \ldots) h + (c + 3dx + \\ &+ 6ex^2 \ldots\ldots) h^2 + (d + 4ex \ldots\ldots) h^3 \ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder:

$$f(x+h) = (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4\ldots)$$
$$+ (b+2cx+3dx^2+4ex^3+5fx^4..)\,h$$
$$+ (2c+6dx+12ex^2+20fx^3..)\,\frac{h^2}{1.\,2}$$
$$+ (6d+24cx+60fx^2..)\,\frac{h^3}{1.\,2.\,3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daraus ist nun ersichtlich, daß, wenn man die neue Function in eine Summe geordnet nach den Potenzen des Zuwachses umwandelt,

1) das erste Glied die primitive Function selbst ist;
2) alle Potenzen des Zuwachses mit dem Produkte der Ordnungszahlen der vorhergehenden Glieder dividirt sind;
3) die Coefficienten Functionen sind, die sämmtlich von der primitiven Function abhängen, weßwegen sie auch abgeleitete Functionen und der Coefficient der ersten Potenz vorzugsweise die erste Ableitung genannt werden;
4) die Coefficienten auch unter sich von einander abhängen und zwar, daß jeder Coefficient aus dem unmittelbar vorhergehenden auf dieselbe Weise gebildet wird, und zwar auf die Weise, nach der die erste Ableitung aus der primitiven Function gefunden wird;
5) jeder Coefficient auch aus dem nachfolgenden gebildet wird auf gleiche Art und zwar auf dieselbe Art, nach der die primitive Function aus der ersten Ableitung entsteht bis auf eine constante Zahl;
6) daß demnach ein einziges Glied der geordneten Summe der neuen Function die ganze Summe mit Einschluß der primitiven Function bestimmt;

Digitized by Google

7) daß der Zuwachs so klein angenommen werden kann, daß gegen jedes einzelne Glied die Summe aller nachfolgenden verschwindet.

Aus diesen Eigenschaften der geordneten Summe einer neuen Function ergeben sich nun folgende zwei Aufgaben:

1) Aus einer abgeleiteten Function die unmittelbar nachfolgende; und
2) aus einer abgeleiteten Function die unmittelbar vorhergehende zu bestimmen.

Die erste dieser Aufgaben ist die der Differentialrechnung, die zweite die der Integralrechnung.

Bezeichnen wir nun die abgeleiteten Functionen der Reihe nach mit:

$$f^{I}(x),\quad f^{II}(x),\quad f^{III}(x),\quad f^{IV}(x)\ldots,$$

so ist:

$$f(x+h) = f(x) + f^{I}(x)\,h + f^{II}(x)\,\frac{h^2}{1.2} + f^{III}(x)\,\frac{h^3}{1.2.3}\cdots$$

Um im Zuwachse sichtbar zu machen, welche Zahl der Function die Variable ist, bezeichnen wir denselben durch die Variable selbst mit Voraussetzung des Zeichens d, so daß

$$h = dx,$$

wodurch

$$f(x+dx) = f(x) + f^{I}(x)\,dx + f^{II}(x)\,\frac{dx^2}{1.2} + f^{III}(x)\,\frac{dx^3}{1.2.3}\cdots$$

Das Produkt der ersten Ableitung in den Zuwachs der Variabeln nennen wir nun das Differential der primitiven Function und bezeichnen dasselbe durch $d\,f(x)$, daher ist:

$$f^{I}(x)\,dx = d\,f(x).$$

Aus Obigem folgt:

Digitized by Google

$$f^{II}(x)\,dx^2 = f^{I}(f(x)\,dx)\,dx$$
$$= f^{I}(df x)\,dx$$
$$= d\,d\,f(x)$$

wofür wir $d^2 f(x)$ schreiben, und dieses Product das zweite Differential der primitiven Function nennen; zugleich sehen wir, daß das zweite Differential das Differential des ersten Differentiales und daß jedes Differential ein Produkt ist.

Ebenso ist

$f^{III}(x)\,dx^3 = d\,d\,d\,f(x) = d\,d^2 f(x) = d^2\,d\,f(x) = d^3 f(x)$

u. s. w., daher erhalten wir

$$f(x+dx) = f(x) + df(x) + \frac{d^2 f(x)}{1.\ 2} + \frac{d^3 f(x)}{1.\ 2.\ 3} \cdots\cdots$$

Da aber das Differential einer Function erst etwas Bestimmtes ist, wenn die Variable bezeichnet ist, so schreiben wir obigen Ausdruck auf folgende Art:

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\,dx + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.\ 2} + \cdots\cdots$$

Die abgeleiteten Functionen sind daher Quotienten und heißen deßwegen auch Differentialquotienten, weil sie das Verhältniß der Differentiale der primitiven Function zur gleichnamigen Potenz des Zuwachses der Variabeln ausdrücken.

Der Werth der neuen Function in Form der geordneten Summe besteht aus zwei Theilen, nämlich dem ersten Gliede oder der primitiven Function und der Summe aller andern Glieder oder der Differenz der primitiven Function; daher ist:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad f(x+dx) = f(x) + \Delta f(x) \\ &2)\quad \Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{1.\ 2} + \frac{d^3 f(x)}{1.\ 2.\ 3} \cdots \end{aligned}\right\} \text{d. h.}$$

Digitized by Google

1) Jede neue Function ist gleich der Summe aus der primitiven Function und ihrer Differenz;

2) Die Differenz einer Function ist gleich der Summe ihrer Differentiale, nachdem jedes einzelne Differential dividirt ist durch das Produkt der Ordnungszahlen von Eins bis zum Differentialinder.

Ist die primitive Function x selbst, so ist die neue Function $x + dx$, daher

$$\Delta x = dx \text{ d. h.}$$

Der Zuwachs der Variabeln ist sowohl die Differenz als auch das Differential derselben.

Nach diesen Begriffsentwicklungen gehen wir nun zur Lösung der Aufgabe des Differentialkalkuls oder zur Bestimmung des Differentials einer Function über.

Aus dem Begriff des Differentials geht hervor, daß das Differential einer Function dadurch gefunden wird, daß man die neue Function herstellt, diese in eine Summe geordnet nach den Potenzen des Zuwachses umwandelt, und von dieser Summe nur das erste Glied sucht: z. B.

1) $d x^m$;

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + \ldots$$
$$d x^m = m x^{m-1} dx$$

2) $d(a+bx)(c-dx+ex^2)$;

$$(a+b[x+h])(c-d[x+h]+e[x+h]^2) =$$
$$([a+bx]+bh)([c-dx+ex^2]+[2ex-d]h+eh^2) =$$
$$(a+bx)(c-dx+ex^2) + (c-dx+ex^2)bh +$$
$$+ (a+bx)(2ex-d)h \ldots.$$
$$d(a+bx)(c-dx+ex^2) = ([c-dx+ex^2]b +$$
$$+ [a+bx][2ex-d])dx.$$

Digitized by Google

3) $d\frac{a+bx}{c+dx}$;

$$\frac{a+b(x+h)}{c+d(x+h)} = \frac{(a+bx)+bh}{(c+dx)+dh} = \frac{a+bx}{c+dx} + \frac{b(c+dx)-(a+bx)d}{(c+dx)^2}h$$

$$\begin{array}{r} -(a+bx) + \frac{(a+bx)dh}{c+dx} \\ \hline \frac{bh(c+dx)-(a+bx)dh}{c+dx} \end{array}$$

$$d\frac{a+bx}{c+dx} = \frac{(c+dx)b-(a+bx)d}{(c+dx)^2}dx;$$

4) $d\log x$;

$$\log(x+h) = \log(1+\frac{h}{x})x = \log x + \frac{h}{x}\cdots\cdots$$

$$d\log x = \frac{dx}{x};\ \text{u. f. w.}$$

Da es aber zweckmäßig ist, für jede Function eine besondere Regel abzuleiten, so wollen wir diese der Reihe nach suchen, und dabei unter

$$X$$

immer einen Ausdruck verstehen, in welchem x als Variable enthalten ist. Demnach ist:

1) $f(x) = X_1 + X_2 + X_3$

$$f(x+dx) = (X_1+\Delta X_1)+(X_2+\Delta X_2)+(X_3+\Delta X_3)$$

$$\Delta fx = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3$$

$$\Delta(X_1+X_2+X_3) = \frac{dX_1}{dx}dx + \frac{d^2X_1}{dx^2}\asymp\frac{dx^2}{1.\ 2}\cdots\cdot$$

$$+\frac{dX_2}{dx}dx + \frac{d^2X_2}{dx^2}\asymp\frac{dx^2}{1.\ 2}\cdots\cdot$$

Digitized by Google

$$+ \frac{dX_3}{dx} dx + \frac{d^2X_3}{dx^2} \times \frac{dx^2}{1.\ 2} \cdots$$

$$= \frac{dX_1 + dX_2 + dX_3}{dx} dx + \frac{d^2X_1 + d^2X_2 + d^2X_3}{dx^2} \frac{dx^2}{1.\ 2} \cdots$$

$$d(X_1 + X_2 + X_3) = dX_1 + dX_2 + dX_3 \text{ d. h.}$$

Das Differential einer Summe ist gleich der Summe der Differentiale der Glieder.

2) $f(x) = -X$

$f(x + dx) = -(X + \Delta X)$

$$\Delta fx = -\Delta X$$

$$\Delta(-X) = -\left(\frac{dX}{dx} dx + \frac{d^2X}{dx^2} \times \frac{dx^2}{1.\ 2} + \cdots\right)$$

$$d - X = -dX \text{ d. h.}$$

Das Differential einer negativen Zahl ist gleich dem negativen Differential ihrer Basis.

3) $f(x) = X_1 X_2$

$f(x + dx) = (X_1 + \Delta X_1)(X_2 + \Delta X_2)$

$= X_1 X_2 + X_1 \Delta X_2 + X_2 \Delta X_1 + \Delta X_1 \Delta X_2$

$$\Delta f(x) = X_1 \Delta X_2 + X_2 \Delta X_1 + \Delta X_1 \Delta X_2$$

$$\Delta X_1 X_2 = X_1 \frac{dX_2}{dx} dx + X_1 \frac{d^2X_2}{dx^2} \times \frac{dx^2}{1.\ 2} + \cdots$$

$$+ X_2 \frac{dX_1}{dx} dx + X_2 \frac{dX_1}{dx^2} \times \frac{dx^2}{1.\ 2} + \cdots$$

$$+ \frac{dX_1\, dX_2}{dx^2} dx^2 + \cdots$$

$$\Delta X_1 X_2 = \frac{X_1 dX_2 + X_2 dX_1}{dx} dx +$$

$$+ \frac{X_1 d^2X_2 + 2dX_1 dX_2 + X_2 d^2X_1}{dx^2} \frac{dx^2}{1.\ 2} \cdots$$

Digitized by Google

$$dX_1X_2 = X_1dX_2 + X_2dX_1 \quad \text{d. h.}$$

Das Differential eines Produktes aus zwei Faktoren ist gleich dem ersten Faktor multiplizirt mit dem Differential des zweiten Faktors plus dem zweiten Faktor multiplizirt mit dem Differential des ersten Faktors.

Folgerungen:

1) $$\begin{aligned} dX_1X_2X_3 &= X_1X_2dX_3 + X_3dX_1X_2 \\ &= X_1X_2dX_3 + X_1X_3dX_2 + X_2X_3dX_1 \\ &= \left(\frac{dX_1}{X_1} + \frac{dX_2}{X_2} + \frac{dX_3}{X_3}\right) X_1X_2X_3 \quad \text{d. h.} \end{aligned}$$

Das Differential eines Produktes findet man, wenn man das Differential eines jeden einzelnen Faktors durch den Faktor selbst dividirt und die Summe der Quotienten mit dem Produkte multiplizirt.

2) Da das Differential einer jeden andern Zahl außer den Variabeln d. h. da das Differential einer constanten Zahl gleich Null ist, so ist

$$dAX = AdX + XdA = AdX \text{ da } dA = 0 \text{ d.h.}$$

Constante Faktorn treten vor das Differentialzeichen.

4) $$f(x) = \frac{Z}{N} \text{ *)}$$

$$f(x+dx) = \frac{Z+\Delta Z}{N+\Delta N} = \frac{Z}{N} + \frac{N\Delta Z - Z\Delta N}{N(N+\Delta N)}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \frac{N\Delta Z - Z\Delta N}{N}(N+\Delta N)^{-1} \\ &= \frac{N\Delta Z - Z\Delta N}{N}N^{-1} - \frac{N\Delta Z - Z\Delta N}{N}N^{-2}\Delta N \ldots. \end{aligned}$$

---

*) In diesem Beispiele weichen wir von der gewöhnlichen Bezeichnung ab.

Digitized by Google

$$\Delta\frac{Z}{N} = \frac{N}{N^2}\frac{dZ}{dx}dx + \frac{N}{N^2}\frac{d^2Z}{dx^2}\frac{dx^2}{1.\ 2}\cdot\cdot - \frac{N}{N^3}\frac{dZ}{dx}\frac{dN}{dx}dx^2 \ldots.$$

$$- \frac{Z}{N^2}\frac{dN}{dx}dx - \frac{Z}{N^2}\frac{d^2N}{dx^2}\frac{dx^2}{1.\ 2}\cdot\cdot + \frac{Z}{N^3}\frac{dN}{dx}\frac{dN}{dx}dx^2 \ldots.$$

$$\Delta\frac{Z}{N} = \frac{NdZ - ZdN}{N^2dx}dx +$$

$$+ \frac{N^2d^2Z - ZNd^2N - NdZdN + Z(dN)^2}{N^3dx^2}\frac{dx^2}{1.\ 2}$$

$$d\frac{Z}{N} = \frac{NdZ - ZdN}{N^2} \text{ d. h.}$$

Das Differential eines Bruches ist gleich Nenner mal Differential des Zählers minus Zähler mal Differential des Nenners dividirt durch das Quadrat des Nenners.

5) $f(x) = X^m$

$$f(x+dx) = (X+\Delta X)^m = X^m + mX^{m-1}\Delta X +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2}X^{m-2}(\Delta X)^2 \ldots.$$

$$\Delta f(x) = mX^{m-1}\Delta X + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}X^{m-2}(\Delta X)^2 \ldots.$$

$$\Delta X^m = mX^{m-1}\frac{dX}{dx}dx + mX^{m-1}\frac{d^2X}{dx^2}\frac{dx^2}{1.\ 2}\ldots.$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2}X^{m-2}\frac{(dX)^2}{dx^2}dx^2\ldots$$

$$dX^m = mX^{m-1}dX \text{ d. h.}$$

Das Differential einer Potenz findet man, wenn man den Exponenten zum Coefficienten macht, die Potenz um Eins erniedrigt und mit dem Differential der Basis multiplicirt.

Digitized by Google

6) $f(x) = \sqrt[m]{X}$

$$f(x+dx) = \sqrt[m]{X+\Delta X} = (X+\Delta X)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}-1} \Delta X + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.\ 2} X^{\frac{1}{m}-2} (\Delta X)^2 \ldots\ldots$$

$$\Delta f(x) = \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}-1} \Delta X + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.\ 2} X^{\frac{1}{m}-2} (\Delta X)^2 \ldots\ldots$$

$$\Delta \sqrt[m]{X} = \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}-1} \frac{dX}{dx} dx + \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}-1} \frac{d^2X}{dx^2} \frac{dx^2}{1.\ 2} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.\ 2} X^{\frac{1}{m}-2} \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx^2 \ldots\ldots$$

$$d\sqrt[m]{X} = \frac{1}{m} X^{\frac{1}{m}-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{m\sqrt[m]{X^{m-1}}}\, dX \text{ d. h.}$$

Das Differential einer Wurzel findet man, wenn man das Differential der Basis dividirt durch das Produkt aus dem Exponenten und der Wurzel, nachdem man zuerst die Wurzelbasis mit dem um Eins verminderten Wurzelexponenten potenzirt.

Anmerkung. Diese Regel wird überflüssig, wenn man die Wurzel zuerst in eine Potenz umwandelt.

Die Regel von der Differenzirung einer Potenz und damit auch der eines Bruches folgt aus der Regel für das Produkt; nämlich:

1) $dX^m = \left(\frac{dX}{X} + \frac{dX}{X} + \frac{dX}{X} \ldots\right) X^m = mX^{m-1}\, dX;$

Digitized by Google

$$2)\quad d\frac{Z}{N} = dZN^{-1} = N^{-1}dZ + ZdN^{-1}$$

$$= \frac{dZ}{N} - ZN^{-2}dZ$$

$$= \frac{NdZ - ZdN}{N^2}$$

$$7)\quad f(x) = a^x$$

$$f(x+dx) = a^{x+\Delta x} = a^x a^{\Delta x}$$

$$= a^x\left(1 + \frac{\log a}{1}\Delta X + \frac{\log^2 a}{1.\ 2}(\Delta X)^2 \ldots.\right)$$

$$\Delta f(x) = \frac{\log a}{1}\Delta X + \frac{\log^2 a}{1.\ 2}(\Delta X)^2 + \ldots..$$

$$\Delta a^x = a^x\left(\log a\,\frac{dX}{dx}dx + \log a\,\frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.\ 2} + \ldots.\right.$$

$$\left. + \frac{\log^2 a}{1.\ 2}\,\frac{(dX)^2}{dx^2}dx^2 + \ldots.\right)$$

$$da^x = a^x \log a \times dX \quad \text{d. h.}$$

Das Differential einer Exponential-Größe findet man, wenn man die Exponential-Größe selbst multiplizirt mit dem natürlichen Logarithmus der Basis und mit dem Differential des Exponenten.

$$8)\quad f(x) = \log X$$

$$f(x+dx) = \log(X + \Delta X) = \log\left(1 + \frac{\Delta X}{X}\right)X$$

$$= \log X + \left(\frac{\Delta X}{X}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \ldots..$$

$$\Delta \log X = \frac{\Delta X}{X} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \ldots..$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{X}\frac{dX}{dx}dx + \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} \cdots$$

$$- \frac{1}{2X^2}\frac{(dX)^2}{dx^2} \asymp dx^2 \cdots$$

$$d \log X = \frac{dX}{X} \quad \text{d. h.}$$

Das Differential eines Logarithmus findet man, wenn man das Differential der Zahl dividirt durch die Zahl.

9) Um die Differentiale der Kreisfunctionen zu bestimmen, nehmen wir ihre Werthe durch Reihen oder Exponential-Größen ausgedrückt und differenziren diese; z. B.

$$1)\ d \sin x = d\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdots\right)$$

$$= dx - \frac{3x^2 dx}{1.2.3} + \frac{5x^4 dx}{1.2.3.4.5} \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdots\right) dx$$

$$= \cos x\, dx;$$

$$2)\ d \cos x = d\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}}\, dx\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}\, d{-x}\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1}\, dx$$

$$= -\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\, dx$$

$$= -\sin x\, dx:$$

Digitized by Google

$$3)\quad d\,\mathrm{tg}\,x = d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$= (1 + \mathrm{tg}^2 x)\, dx$$

$$10)\quad d\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = y) = dy - y^2 dy + y^4 dy \ldots\ldots$$

$$= (1 - y^2 + y^4 - y^6 \ldots\ldots)\, dy$$

$$= \frac{1}{1 + y^2}\, dy$$

Ebenso findet man, wenn man in

$$d\sin x = \cos x\, dx$$

$$\sin x = y$$

$$x = \mathrm{arc}\,(\sin = y)$$ setzt:

$$d\,\mathrm{arc}\,(\sin = y) = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

und wenn man in

$$d\cos x = -\sin x\, dx$$

$$\cos x = y$$

$$x = \mathrm{arc}\,(\cos = y)$$ setzt:

$$d\,\mathrm{arc}\,(\cos = y) = -\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Aus obigen Darstellungen sind auch die Regeln für die zweiten und höhern Differentiale ersichtlich, die aber nach dem Begriffe eines höhern Differentials auch durch wiederholtes Differenziren gefunden werden.

Digitized by Google

Damit ist nun die eine Aufgabe der höhern Analysis, worunter man vorzugsweise Differential- und Integralrechnung zusammengenommen versteht, gelöst mit Ausnahme für die Functionen mehrerer variabler Größen und für die Gleichungen, die keine Schwierigkeit und keine besondern Erscheinungen bieten.

Es ist nämlich:

$$df(x,y) = \frac{df(x,y)}{dx}\,dx + \frac{df(x,y)}{dy}\,dy;$$

denn es ist:

$$f(x+dx,\,y) = f(xy) + \frac{df(xy)}{dx}\,dx + \frac{d^2f(xy)}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} \cdots$$

$$f(x+dx,\,y+dy) = f(xy) + \frac{df(xy)}{dy}\,dy + \frac{d^2f(xy)}{dy^2}\,\frac{dy^2}{1.2} \cdots$$

$$+ \frac{df(xy)}{dx}\,dx + \frac{d^2f(xy)}{dx\,dy}\,dx\,dy + \ldots$$

$$\frac{d^2f(xy)}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} \cdots$$

daher:

$$1)\quad df(xy) = \frac{df(xy)}{dx}\,dx + \frac{df(xy)}{dy}\,dy$$

$$2)\quad d^2f(xy) = \frac{d^2f(xy)}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2f(xy)}{dx\,dy}\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{d^2f(xy)}{dy^2}\,dy^2.$$

In Bezug auf die Gleichungen kommt aber zu den elementaren Eigenschaften derselben noch folgende hinzu:

Wenn man von den zwei Zahlen einer Gleichung zwei gleiche Differentiale nimmt, so bilden die beiden Resultate eine neue Gleichung; z. B.

Digitized by Google

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$
$$2Axdx + 2Bydy + Cydx + Cxdy + Ddx + Edy = 0$$
$$(2Ax + Cy + D)\,dx + (2By + Cx + E)\,dy = 0$$

Höchst merkwürdig ist, daß die erste Aufgabe der höhern Analysis mit der Zeit so verschiedene Lösungen erfahren hat. Der Grund hievon liegt darin, daß man den Differentialkalkul an Beispielen erfand, ohne das Wesen desselben zu erkennen, und ohne daher zu wissen, daß er ein integrirender Theil der reinen Analysis sey; daß aber jetzt, wo diesem Kalkul die gebührende Stellung in der Wissenschaft angewiesen werden kann, noch solche verschiedene Methoden im Gebrauche sind, ist fast räthselhaft.

Die erste und früheste Methode war die Methode des Unendlich Kleinen, die sich unbewußt darauf gründete, daß der Werth des Zuwachses der Variablen beliebig ist, und für einen unendlich kleinen Werth desselben Differenz und Differential gleichbedeutend werden. Allein man konnte sich immer keine genaue Rechenschaft davon geben, warum man in dieser Rechnung, um genau richtige Resultate zu erhalten, die höhern Differentiale außer Acht lassen mußte, was aber darin seinen Grund hat, daß man den Weg, auf dem man vom Differential zur primitiven Function gelangt, unbewußt darauf anwendete, um von der Differenz zur Function zu gelangen, wie aus den Eigenschaften der Reihe der neuen Function ersichtlich ist.

Da aber das Unendlichkleine gleichbedeutend mit Null ist, so haben einige Mathematiker den Zuwachs gleich Null angenommen, und den Werth des Differentialquotienten, der dadurch

$$\frac{0}{0}$$

wurde, betrachtet. Sie benützten daher den Zuwachs nur dazu, um für alle möglichen Functionen das Verhältniß der Veränderung der Function zur Veränderung der Variabeln zu betrachten d. h. den

Digitized by Google

Differentialquotienten zu bestimmen, während sie den Werth und die Bedeutung des Differentials vernichteten.

Die Methode gewann dadurch an Wissenschaftlichkeit und der Kalkul selbst an Evidenz, machte aber eine Zufälligkeit zur Nothwendigkeit, ein zufälliges Merkmal zum Wesentlichen, und hielt so das eigentliche Wesen der Differentialrechnung im Dunkeln.

Unter den Anwendungen der Differentialrechnung ragt besonders hervor, daß sie zeigt, wie aus den Veränderungen der Elemente eines Objektes die Veränderung aller abhängigen Elemente und des Objektes selbst gefunden werden kann. Diese Anwendung geht bei obiger Methode verloren, und es bleibt nur mehr die zweite Anwendung: Aus dem Differentialquotienten die primitive Function herzustellen, übrig.

Die dritte Methode, die in neuerer Zeit fast allgemeinen Anhang sich verschafft hat, die Grenzmethode reservirt sich die Bedeutung des Zuwachses als eine beliebige Größe mithin auch die Anwendungen, die daraus hervorgehen, benützt aber zu ihren Begriffsentwicklungen und damit zu allen vorkommenden Operationen die Eigenschaft des Differentials, daß dasselbe die Grenze der Annäherung der neuen und primitiven Function für eine unendliche Abnahme des Zuwachses ist.

Diese Methode ist daher auf die Eigenschaft der mehrerwähnten Summe gegründet, daß der Zuwachs so klein angenommen werden kann, daß jedes Glied größer ist als die Summe aller nachfolgenden.

Häufig ist der Grenz-Methode der Vorwurf gemacht worden, daß ihr das Unendlichkleine zu Grunde liege, was aber falsch ist, wie aus Obigem hervorgeht. Es kann ihr auch nicht zum Vorwurf gemacht werden, daß sie aus den Anwendungen abstrahirt

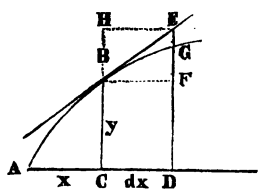
Digitized by Google

sey, vielmehr betrachtet sie den Differentialkalkul als einen Theil der reinen Analysis, und es gereicht ihr zum Vorzug, daß sie bei den Anwendungen treu ihren Principien zu Werke gehen kann, wo sie oftmals unentbehrlich wird, nämlich in allen jenen Anwendungen, in denen der Werth des Differentials nur nach obiger Eigenschaft bestimmt werden kann, wie z. B. in der Mechanik bei Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten auf Maschinen.

Daß übrigens unsere Principien allgemeinerer Natur sind, und folgerechter die beiden Theile der Analysis mit einander verbinden, wird wohl Jedermann zugestehen müssen, obwohl wir uns in dieser Beziehung gerne dem Urtheile derjenigen Männer unterwerfen, die durch ihr Wissen berufen sind, über derlei Arbeiten ein maßgebendes Urtheil zu fällen; nur sey uns erlaubt zu erwähnen, daß, wenn über Dinge der Art Erfahrung für nöthig erachtet wird, unsere Methode diese für sich hat, indem sie sich beim Unterrichte bereits bewährte.

Wir wollen zum Schluße die verschiedenen Methoden noch an einem Beispiele zeigen.

Es sey nämlich A B ein Bogen einer beliebigen Curve, y eine bekannte Function von x d. h. das Krümmungsgesetz durch eine Gleichung zwischen y und x ausgedrückt, B E eine Tangente, und nun werde x größer um d x, so sind y, Bogen A B und Fläche A B C primitive Functionen von x, d x der Zuwachs der Variabeln, D G, A B G und A G D die neuen Functionen und F G, B G und B G D C die Differenzen.



Nach der Methode des Unendlichkleinen sind nun die Dif-

Digitized by Google

ferentiale dieſer Größen FE, BE und BFDC, weil ſie für ein unendlich kleines dx mit den Differenzen zuſammenfallen, während es nach der Nullmethode keine Differentiale gibt, ſondern nur die Verhältniße der genannten Differentiale zu dx für $dx = 0$, wobei z. B. das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels der geometriſchen Tangente am Endpunkte der Curve zur Are x bezeichnet. Bei der Grenzmethode ſind die genannten Objekte die Differentiale bei beliebigem Werthe von dx, weil ſie bei unendlicher Abnahme von dx als Grenzen der Differenzen erſcheinen; während ſie nach unſerer Methode die Differentiale ſind, weil ſie in allen ihren Eigenſchaften den Gliedern der Reihe der neuen Function entſprechen.

So iſt z. B. alles Obige als richtig vorausgeſetzt, das Dreieck BFE das zweite Glied der Differenz weil es gleich $\frac{dy \cdot dx}{2}$ oder $\frac{f(x) \cdot dx^2}{1.2}$, daher das Rechteck HEFB das zweite Differential der primitiven Fläche ABC.

Kennt man nun das Verfahren, wie man vom Differential zur primitiven Function gelangt, ſo wird man von der Tangente BE auf Bogen AB und von dem Rechteck BFDC auf die Fläche ABC kommen; oder man gelangt vom zweiten Differential zum erſten d. h. von HEFB auf BFDC und davon auf ABC.

Will man nun dieſe Regeln anwenden um aus BFDC und HEFB zugleich oder aus der ganzen Differenz BGDC auf die Fläche ABC zu gelangen, ſo muß man dx als unendlich klein annehmen, und muß die höhern Potenzen von dx als Null betrachten, damit man durch dieſe Annahme gleichſam zuerſt zum Differential gelangt.

Nebenbei ſey bemerkt, daß, wenn man für eine beſtimmte Function zuerſt die neue Function und ihre Summe herſtellt, als-

Digitized by Google

dann aber die Variable gleich Null und den Zuwachs gleich der Variablen setzt, aus der neuen Function die primitive entsteht, während diese auf der andern Seite in eine geordnete Summe verwandelt erscheint z. B.

$$\sin(x+dx) = \sin x + \cos x\,dx - \sin x\,\frac{dx^2}{1.2} - \cos x\,\frac{dx^3}{1.2.3}$$

$$x = 0;\quad dx = x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Um noch ein Beispiel der Anwendung der Differentialrechnung zu geben, sey folgende Aufgabe gewählt:

Eine Seite eines Dreieckes mit den zwei daran liegenden Winkeln seyen gegeben, und alle übrigen Größen des Dreieckes nebst der Fläche in Formeln dargestellt; um wie viel ändern sich nun diese Größen, wenn sich die Grundlinie und die beiden Winkel um bestimmte beliebige Größen ändern?

Um aber eine allgemeine Anschauung von der Anwendung der höhern Analysis zu gewinnen, halten wir uns an ihren Begriff, wornach sie die Wissenschaft von den allgemeinen Eigenschaften der zusammengesetzten Zahlen ist. Jede besondere Frage wird daher ihre Lösung in der niedern Analysis, jede allgemeine aber in der höhern Analysis finden, mit dem Unterschiede, daß wir jedes Spezielle dem Allgemeinen unterordnen können, aber nicht umgekehrt. Die Fläche des Kreises zu bestimmen ist demnach eine Aufgabe der niedern Analysis, ebenso die Frage nach der Fläche einer Ellipse; die Frage nach der Fläche irgend einer Figur wird in der höhern Analysis beantwortet, woraus wir indeß auch die Lösung der beiden erstern Fragen abstrahiren können.

Digitized by Google

Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte wird eine Differentialgleichung seyn, während es die für eine schiefe Ebene nicht ist, aber doch aus obiger abgeleitet werden kann.

So einfach und leicht die Lösung der einen der beiden Aufgaben der höhern Analysis ist, die wir aus den Eigenschaften der geordneten Summe für die neue Function abgeleitet haben, so schwierig ja in vielen Fällen unlösbar ist die zweite Aufgabe: das Integral eines Differentialausdruckes zu bestimmen.

Wir haben schon aus der erwähnten Reihe gesehen, daß bei der Bestimmung eines Integrals immer noch ein constantes Glied fehlt, das nur bestimmt werden kann, wenn der Werth des Integrals für einen besonderen Werth der Variabeln bekannt ist; zugleich haben wir aber auch gesehen, daß die Bestimmung des Integrals sehr einfach ist, sobald die Differentialfunction in eine geordnete Summe verwandelt ist. Da aber dieses Integral wieder in Form einer geordneten Summe erscheint, so werden in vielen Fällen geschloßene Ausdrücke durch Integration nicht gefunden, so lange die Summirung der Reihen keine Fortschritte macht.

Der ganze Integralkalkul hat daher eigentlich keine Theorie und beschränkt sich nur auf die Formeln, die wir aus der Differential-Rechnung entlehnen, und die wir hier folgen lassen, um unserer Schrift eine gewisse Vollständigkeit zu geben.

1) $\int (X_1 + X_2 + X_3)\, dx = X_1 + X_2 + X_3 + C$ d. h.

Das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder.

2) $\int -X\, dx = -X + C$ d. h.

Das Integral einer negativen Zahl ist gleich dem negativen Integral der Basis.

Digitized by Google

3) $\int X_1 X_2 dx = X_1 \int X_2 dx - \int dX_1 \int X_2 dx + C$ d. h.

Das Integral eines Produktes ist gleich dem ersten Faktor mal dem Integral des zweiten weniger dem Integral eines Produktes, das gebildet ist aus dem Differential des ersten Faktors und dem Integral des zweiten Faktors.

Um diese Regel zu beweisen ist:

$$d X_1 Y = X_1 dY + Y dX_1 \text{ und}$$
$$X_1 dY = dX_1 Y - Y dX_1$$
$$\int X_1 dY = X_1 Y - \int Y dX_1 ;$$

nun ist aber:

$$dY = X_2 dx$$
$$Y = \int X_2 dx$$

daher

$$\int X_1 X_2 dx = X_1 \int X_2 dx - \int dX_1 \int X_2 dx.$$

Eine unmittelbare Folge dieses Gesetzes heißt: Constante Faktoren treten vor das Integralzeichen, oder

$$\int AX dx = A \int X dx + C.$$

4) $\int \frac{dX}{X} = \log X + C = \log CX$ d. h.

Das Integral eines Bruches, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, ist gleich dem Logarithmus des Nenners.

Brüche, deren Nenner Faktoren enthalten, werden in Partial-Brüche zerlegt. Um hier ein Beispiel aus der Arithmetik zu geben, seyen zu suchen die Partialbrüche von

$$\frac{39}{20}.$$

Gemäß der Bedeutung des Bruches drückt derselbe aus, wie oft sich der Nenner vom Zähler abziehen läßt. Ist nun der Nenner größer als der Zähler, so lassen sich nur Theile desselben abziehen, und die erhaltenen Subtractionsmengen sind Brüche; z. B. in

$$\frac{39}{20}$$

Digitized by Google

läßt sich wirklich der Nenner vom Zähler abziehen, und wir erhalten dadurch Ganze. Der größte Faktor ist 10, die Abziehung gibt Halbe, der Faktor 5 gibt Viertl, und der Faktor 4 gibt fünftl, daher ist

$$\tfrac{39}{20} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}$$

39		19		9		4	
20	1	10	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{5}$
19		9		4		—	

Dieses Verfahren läßt sich auch auf Buchstabenausdrücke anwenden, obwohl wir im Allgemeinen brauchbarere Methoden hiefür besitzen.

5) $\int X^m \, dx = \frac{X^{m+1}}{m+1} + C$ d. h.

Das Integral einer Potenz findet man, wenn man den Exponenten um Eins erhöht und durch den erhöhten Exponenten dividirt.

6) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ d. h.

Das Integral einer Exponentialgröße findet man, wenn man die Exponentialgröße durch den Logarithmus der Basis dividirt.

7)
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,(\text{tg} = x) + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\sin = x) + C \\ \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\cos = x) + C \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ \int \cos x \, dx = \sin x + C \end{cases}$$

Digitized by Google

Die ausgedehnteste Anwendung von diesen Lehrsätzen, welche den ganzen Umfang der Integralrechnung erschöpfen, gestattet der dritte Satz, wovon wir drei Beispiele anführen wollen, nämlich:

$$\int x^m (a + b x^n)^p \, dx, \int \sin x \sin^n x \, dx \text{ und } \int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

Es ist nämlich:

$$\int x^m (a + b x^n)^p dx = (a + b x^n)^p \int x^m dx -$$
$$- \int p (a + b x^n)^{p-1} b n x^{n-1} dx \int x^m dx$$

$$= \frac{x^{m+1} (a + b x^n)^p}{m + 1} - \frac{b n p}{m + 1} \int x^{m+n} (a + b x^n)^{p-1} dx.$$

Sucht man daraus den Werth für das zweite Integralglied und richtet die Exponenten so ein, daß sie die erlangte Form erhalten, nämlich setzt man

$$m \text{ statt } m + n$$
$$\text{und } p + 1 \text{ statt } p$$

so erhält man:

$$\int x^m (a + b x^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1} (a + b x^n)^{p+1}}{b n (p + 1)} -$$
$$- \frac{m - n + 1}{b n (p + 1)} \int x^{m-n} (a + b x^n)^{p+1} dx.$$

Setzt man aber in der ersten Formel

$$(a + b x^n)^p = (a + b x^n)^{p-1} (a + b x^n)$$
$$= a (a + b x^n)^{p-1} + b x^n (a + b x^n)^{p-1}$$

so erhält man auf obige Art zwei neue Werthe des verlangten Integrals. Ebenso erhält man zwei weitere Werthe, wenn man im zweiten Integralglied der ersten Formel setzt:

$$b x^n = (a + b x^n) - a.$$

Schreibt man nun X für $a + b x^n$, so sind die erwähnten sechs Werthe des verlangten Integrals folgende:

Digitized by Google

$$1)\ \int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m+1} X_p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1}\int x^{m+n} X^{p-1}\,dx$$

$$2)\ \int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m-n+1} X^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{m-n+1}{bn(p+1)}\int x^{m-n} X^{p+1}\,dx$$

$$3)\ \int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m+1} X^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m+np+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n} X^p\,dx$$

$$4)\ \int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m-n+1} X^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n} X^p\,dx$$

$$5)\ \int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1}\int x^m X^{p-1}\,dx$$

$$6)\ \int x^m X^p\,dx = -\frac{x^{m+1} X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{an(p+1)}\int x^m X^{p+1}\,dx$$

$$\int \sin x \cos^n x\,dx = \cos^n x \int \sin x\,dx -$$
$$-\int n\cos^{n-1} x\,d\cos x \int \sin x\,dx$$
$$= -\cos^{n+1} x - n\int \sin x \cos^n x\,dx$$
$$(n+1)\int \sin x \cos^n x\,dx = -\cos^{n+1} x$$
$$\int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

Damit wird man nun leicht folgende sechs Formeln abzuleiten im Stande seyn:

$$1)\ \int \sin^m \cos^n dx = \frac{\sin^{m+1} \cos^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} \cos^{n-2} dx$$

$$2)\ \text{"} = -\frac{\sin^{m-1} \cos^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} \cos^{n+2} dx$$

$$3)\ \text{"} = -\frac{\sin^{m-1} \cos^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} \cos^n dx$$

$$4)\ \text{"} = \frac{\sin^{m+1} \cos^{n-1}}{m+n} + \frac{n+1}{m+n}\int \sin^m \cos^{n-2} dx$$

Digitized by Google

5) $\int \sin^m \cos^n dx = \frac{\sin^{m+1} \cos^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} \cos^n dx$

6) " $= -\frac{\sin^{m+1} \cos^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m \cos^{n+2} dx$

Alle irrationalen Differentialausdrücke können nur dadurch integrirt werden, daß man sie durch zweckmäßige Substitution auf rationale Ausdrücke zurückführt.

Wir wollen hier diese Substitutionsausdrücke für die verschiedenen irrationalen Differentialausdrücke folgen lassen:

1) $f(x, \sqrt[m]{x}, \sqrt[n]{x}, \sqrt[p]{x} \ldots.) dx$

$x = y^{mnp \ldots.}$

2) $f(x, \sqrt[n]{a+bx}) dx$

$a + bx = y^n$

3) $f\left(x, \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}}\right) dx$

$\frac{a+bx}{f+gx} = y^n$

4) $f(x, (a+bx)^{\frac{m}{n}}, (a+bx)^{\frac{p}{q}} \ldots.) dx$

$a+bx = y^{nq \cdot \cdot \cdot}$

5) $f(x, \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{p}{q}} \ldots.) dx$

$\frac{a+bx}{f+gx} = y^{nq \cdot \cdot}$

6) $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$

$a+bx+cx^2 = c(x+y)^2$

Digitized by Google

7) $f(x, \sqrt{a + bx - cx^2})\, dx$

$a + bx - cx^2 = c(v_1 - x)(x - v_2) = (x - v_2)cy$

8) $f(x, \sqrt{a_1 + b_1 x}, \sqrt{a_2 + b_2 x})\, dx$

$a_1 + b_1 x_1 = (a_2 + b_2 x)\, y^2$

9) $f\left(x^{m-1}, (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\right) dx$

1) Ist $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, so setzt man

$a + bx^n = y^q$

2) Ist $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, so setzt man

$a + bx^n = x^n y^q$

Der Integralkalkul gibt unserer Schrift zunächst eine zur Benützung nöthige Vollständigkeit; zeigt aber auch zugleich, welche große Lücke in der reinen Mathematik noch auszufüllen ist; es fällt nämlich die ganze Theorie dieses umfassenden Kalkuls.

Für die Anwendung kann man jede Differentialfunction in eine Reihe umwandeln und diese ist jedenfalls integrabel; aber von der Erreichung eines geschlossenen Ausdruckes werden wir durch eine neue Lücke in der Analysis, wodurch alle bezüglich der allgemeinen Zahl möglichen Fragen so viel wie unbeantwortet sind, abermals abgehalten. Demnach wollen wir sogleich noch die Frage erörtern, auf welche Weise eine weitere Ausbildung der Analysis möglich seyn dürfte?

Seit der Erfindung der Differential- und Integral-Rechnung ist die Literatur der Mathematik am meisten angewachsen, aber merkwürdiger Weise wird in allen diesen Untersuchungen ein lei-

Digitized by Google

tendes Princip fast gänzlich vermißt, und nur das Bedürfniß für die Anwendung hat zum Theil neue Grundsätze geltend gemacht, die daher sämmtlich auf Näherungsmethoden hinauslaufen; ein rein mathematisches Princip aber als Leitfaden wird in dieser Epoche der Geschichte der Mathematik nicht bemerkt, und die Zahl der eigentlichen Lehrsätze der Analysis ist nicht vermehrt worden.

Um nun die gestellte Frage zu beantworten, haben wir als Anhaltspunkt eine ähnliche Epoche in der Geschichte der Geometrie. Die sogenannten elementaren Eigenschaften der geometrischen Grundobjekte waren nämlich längst bekannt, ihre Folgerungen zur Genüge ausgebeutet und so die Elemente der Geometrie gleichsam abgeschlossen. Die analytische Geometrie, die auf einem andern Wege zu denselben Resultaten gelangte, förderte zwar die geometrische Wissenschaft, allein die Lücken in der Analysis hinderten sie bald an weitern Fortschritten. Da traten mit einem Male neue Geometer, unter ihnen besonders Steiner in Berlin auf, zeigten, daß die geometrischen Grundobjekte noch lange nicht erforscht seyen, und förderten so durch Entdeckung neuer Eigenschaften der Elemente das geometrische Wissen auch bezüglich höherer Objekte unglaublich. Der Analogie nach ist nun der Schluß erlaubt, daß die analytischen Elemente schwerlich erschöpft seyn dürften, und daß durch Auffinden neuer Eigenschaften der zusammengesetzten Zahlen, wenn nicht auch durch Herstellung neuer Objekte, die Analysis noch bedeutende Fortschritte zu erwarten habe. Diese Fortschritte müßten hauptsächlich den Weg der Induction oder analog dem Wege der neuern Geometrie gehen, und daher wären zunächst die Principien eines Inductionskalkuls festzusetzen; so kann man z. B. schließen, daß die Function von (a, b), die sich um $\frac{1}{b}$ ändert,

Digitized by Google

wenn a um die Zahleneinheit wächst, $\frac{a}{b}$ sey, weil keine andere Zahl diese Eigenschaft besitzt. Eine ganze Reihe von solchen und ähnlichen Lehrsätzen würde alsdann die Principien des Inductions-Kalkuls enthalten.

Ein anderer analytischer Weg für eine weitere Ausbildung der Analysis kann nur dadurch geschaffen werden, daß man in den bisherigen Kalkul ein allgemein leitendes Princip einführt, das alsdann weitere Entwicklungen gestatten wird. Nun sind alle Operationen in der Analysis nichts anderes als Involutionen von Combinationen und Variationen mit und ohne Wiederholungen, deren Elemente die natürlichen Zahlen sind; und damit ist schon eine ganz allgemeine Betrachtung in die Analysis gebracht. Alle weitern Fortschritte in dieser Wissenschaft hängen daher innig zusammen mit der Ausbildung der Combinationstheorie, und hier ist auch der Induction ein weites Feld geöffnet.

Die combinatorische Analysis hat bisher merkwürdiger Weise nicht viele Verehrer gefunden, dennoch ist ihre Theorie, so weit sich dieselbe auf die Klassen bezieht, so ziemlich vollständig; derjenige Theil aber, der die Ordnungen zum Gegenstande seiner Untersuchungen hat, ist gänzlich unberührt, obwohl ohne diesen Ordnungskalkul eine Auflösung der höhern Gleichung z. B. ein vergeblicher Versuch bleiben wird.

Da nun dieser Zweig der Analysis nicht blos für die höhern Gleichungen, sondern auch für die Reihen, besonders für ihre Summirung, wodurch auch eine Theorie des Integralkalkuls geschaffen seyn würde, von höchster Wichtigkeit ist, so wollen wir versuchen, seine Grundlagen hier festzustellen.

Als gegeben müssen dabei immer folgende Stücke betrachtet werden:

Digitized by Google

1) Die Zahl der Elemente muß bekannt seyn, weil davon die Zahl der Ordnungen, sowie die Zahl der Klassen selbst abhängt;
2) alle mit diesen Elementen möglichen Combinationsklassen ohne Wiederholungen müssen gegeben seyn, weil daraus die Combinationsklassen mit Wiederholungen und die Variationen gefunden werden können.

Mehr als dieses kann nicht gegeben seyn. Aus der Combinationstheorie selbst aber entlehnen wir außerdem noch folgende Axiome:

1) Eine Ordnung suchen heißt im Allgemeinen immer nur eine erste Ordnung suchen.
2) Diese Ordnung ist jedesmal die Differenz zwischen zwei gleichnamigen Klassen, wovon aber die Elemente in der einen alle positiv und in der andern alle bis auf eines negativ sind.
3) Die Herstellung der gleichnamigen Klasse mit positiven und negativen Ordnungen ist ausschlüßlich nur durch Wurzeln möglich.
4) Man kann nicht die Ordnungen irgend einer Klasse herstellen, wenn nicht zuvor die Ordnungen der höhern Klassen hergestellt sind; die Ordnungen der ersten Klasse setzen also die Ordnungen aller möglichen höhern Klassen voraus.
5) Die höchste Klasse hat jedesmal nur eine einzige Ordnung, ändert also ihren Werth nicht, sondern nur ihr Zeichen.
6) Nur in der vorletzten Klasse allein lassen sich die zwei darin vorkommenden Ordnungen durch ganze Klassen finden, weil die letzte Klasse selbst nur Eine Ordnung hat; zur Auf-

Digitized by Google

suchung der Ordnungen aller übrigen Klassen werden die Ordnungen aller höhern vorausgesetzt.

7) Die Untersuchung muß von solchen Klassen ausgehen, denen eine Zahl von Elementen zu Grunde liegt, welche eine Potenz von 2 ist, weil wir nur für gerade Wurzeln eine Zeichen-Ambiguität haben.

Nach diesen Voraussetzungen ist man nun im Stande, die zwei wichtigsten Probleme des Ordnungskalkuls aufzustellen, nämlich:

1) Wenn alles gegeben ist, was oben angezeigt wurde, so ist das erste Problem, zu bestimmen, von welchen Wurzeln die Ordnungen einer jeden Klasse abhängen.

2) Das nächste Problem ist die Bildung des Complexes aus den Klassen mit lauter positiven Ordnungen, der unter jedem Wurzelzeichen stehen muß.

Es können sich im Verlaufe der Untersuchung noch mehrere sekundäre Aufgaben darbieten, aber von der Lösung der zwei aufgestellten Probleme wird ausschlüßlich alles weitere abhängen.

Um den Werth dieses Ordnungskalkuls zum Voraus einzusehen, wollen wir den Gang der Lösung der höhern Gleichungen betrachten.

In der allgemeinen Gleichung seyen alle Elemente positiv, daher auch alle Ordnungen in allen Klassen; die Coefficienten sind die Combinationsklassen ohne Wiederholung dieser Elemente, und so sey die Gleichung gegeben. Mit diesen Daten sollen nun alle in der Gleichung vorkommenden Klassen neuerdings construirt werden, aber unter der Voraussetzung, daß alle Elemente bis auf eines negativ sind, weil der Werth der unbekannten Zahl eine Ordnung der ersten Klasse ist.

Digitized by Google

Bei dieser Annahme bleibt das letzte Glied unverändert und nur sein Zeichen geht in das entgegengesetzte d. h. von + in — über. In allen andern Klassen bleibt der Zahlenwerth der Ordnungen, während sich der der Klassen ändert, daher ist hier eine Reihe von Lehrsätzen nothwendig, die die Bildung der verlangten Klassen einleitet und möglich macht. Bei wirklichen Involutionen beginnt man mit der ersten Klasse, bei der Auflösung der Gleichungen aber muß die erste Klasse gesucht werden, und man beginnt bei der letzten Klasse.

Nur auf diese Weise ist die Möglichkeit der Auflösung der höhern Gleichungen zu gewärtigen, da der Unterschied zwischen der Construktion einer Gleichung und deren Auflösung darin besteht, daß jene ein Kalkul mit Klassen, diese ein Kalkul mit Ordnungen ist, ein Unterschied, der bisher nicht beachtet wurde. Ueberhaupt erscheinen die höhern Gleichungen und ihre Eigenschaften in einem ganz andern Lichte, wenn man statt des gewöhnlichen Ganges in der Analysis den combinatorischen wählt, wodurch jeder einzelne darauf bezügliche Lehrsatz eine principielle Nothwendigkeit wird.

Auf diesem Wege hat die Analysis auch eine principiell sich ergebende Erweiterung der Theorie der Reihen und der Kettenbrüche zu erwarten, deren Construktion auf den Combinationen mit Wiederholungen beruht; und die Ausbildung eines Ordnungskalkuls würde daher auch hier sehr willkommen sein.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Anwendung der Differential-Rechnung auf die Herstellung der Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes eines Systemes von Kräften ohne Beihülfe des Unendlichkleinen geben, von einem Ueberblicke der Grundlagen der Mechanik überhaupt begleitet.

Digitized by Google

Die Grundlagen aller Bearbeitungen der Mechanik reduziren sich auf drei: 1) den Hebel, 2) das Parallelogramm der Kräfte, 3) auf die virtuelle Geschwindigkeit.

In jeder solchen Bearbeitung finden wir alle Kraft der Autorn dazu verwendet, einen Beweis ihres Principes zu geben, welches Bestreben stets die ersten Blätter ihrer Arbeiten ausfüllt; allein alle diese Bestrebungen sind bisher mißlungen und laufen am Ende darauf hinaus, daß das zur Grundlage angenommene Princip als Grundsatz zu betrachten sey.

Die neuern Bearbeitungen der Mechanik haben alle den Hebel als Princip aufgegeben, daher wollen wir im Nachfolgenden nur die Beweise der beiden andern erwähnten Principien, nämlich des Parallelogramms der Kräfte und der virtuellen Geschwindigkeit geben.

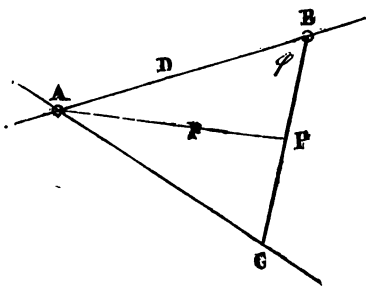
I. Das Parallelogramm.

Beim Parallelogramm der Kräfte hat man zu beweisen, nachdem dargethan ist, daß das Maß einer jeden Kraft die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes und diese eine begrenzte Linie sey, daß die Diagonale die Mittelkraft der beiden Seitenkräfte vorstelle. So lange man nun unterließ, zuerst die Eigenschaften der Mittelkraft festzustellen, mußte jeder Versuch eines Beweises mißlingen. Um aber die Grundeigenschaft der Mittelkraft zu finden, hat man zuerst zu erforschen, was man unter der Leistung einer Kraft sich vorzustellen habe. Diese ist wesentlich verschieden von der Größe der Kraft, und eine Function von der Lage des Angriffspunktes, der Richtung und der Größe derselben, und wird erst sichtbar, wenn man der fraglichen Kraft ein Geschäft verrichten läßt, welches im Allgemeinen gleichgültig ist, da bezüglich der Vergleichung der Leistungen der Kräfte nur als nothwendig erscheint, daß alle diese Arbeiten einerlei Natur seyen.

Digitized by Google

Wir wollen demnach die Kräfte benützen, um durch Bewegung von Linien in der Zeiteinheit Flächen zu erzeugen, und wählen daher eine in einem Punkte befestigte gerade Linie als Bewegungsobjekt, jedoch mit der Bestimmung, daß die Befestigung nicht die geringste Spur einer weitern Kraft vertreten soll, d. h. daß die zu bewegende Gerade absolut um und durch den Befestigungspunkt beweglich sey.

Unter dieser Voraussetzung wird der Angriffspunkt der Kraft, deren Leistung gesucht werden soll, der ein Punkt der angegriffenen Linie ist, nach dem Gesetze der Trägheit durch den Stoß oder die Kraft in der Zeiteinheit eine bestimmte gerade Linie beschreiben, deren Größe die Größe der Kraft oder des Stoßes und deren Richtung die Richtung der Kraft vorstellen werden; die bewegte gerade Linie wird nun in der Zeiteinheit eine Fläche von bestimmter Größe erzeugen, und diese ist dasjenige, was wir unter der Leistung der Kraft verstehen, und in der That ist diese Fläche auch eine Function von der Lage des Angriffspunktes, der Richtung und der Größe der Kraft, indem man findet:



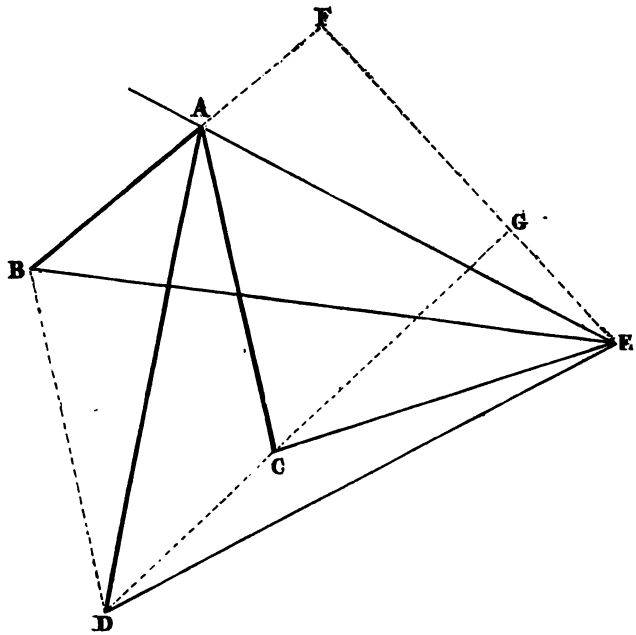
$$\measuredangle ABC = \tfrac{1}{2} Pp$$
$$= \tfrac{1}{2} PD \sin\varphi.$$

Da wir nun unter Mittelkraft immer diejenige Kraft verstehen, deren Leistung unter allen Verhältnissen genau so groß ist,

Digitized by Google

als die Leistungen der gegebenen Kräfte zusammen, so reduzirt sich der Beweis vom Parallelogramm der Kräfte auf folgenden geometrischen Satz:

Wenn man von irgend einem Punkte in der Ebene eines Parallelogrammes Dreiecke herstellt über die beiden Seiten und diejenige Diagonallinie, die vom Durchschnitte dieser Seiten ausgeht, so ist das Dreieck der Diagonale genau so groß als die Summe der Dreiecke über die beiden Seiten.



Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \triangle ADE &= \triangle ACE + \triangle ADC + \triangle DCE \\ &= \triangle ACE + \frac{DC \cdot FG}{2} + \frac{DC \cdot EG}{2} \\ &= \triangle ACE + \frac{DC\,(FG + EG)}{2} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= \triangle ACE + \frac{AB \cdot EF}{2}$$

$$= \triangle ACE + \triangle ABE \text{ q. e. d.}$$

Da nun hier die Bewegungslinie eine gemeinsame, nämlich AE ist, und obiger Beweis für jede solche Linie gilt, welche Richtung und welche Größe sie auch immer haben mag nur mit dem Unterschiede, daß eines der obigen Dreiecke auch negativ werden kann, so ist der Satz bezüglich des Parallelogrammes allgemein, strenge und einfach bewiesen, und der Beweis auf den Begriff der Mittelkraft gegründet.

Eine unmittelbare Folge des Begriffes der Mittelkraft und des obigen Beweises besteht nun darin, daß die Mittelkraft in entgegengesetzter Richtung angebracht das Gleichgewicht herstelle; ferner ergibt sich daraus, welchen Antheil eine Kraft an irgend einer Bewegung ihres Angriffspunktes nimmt.

Nach der überzeugenden Darstellung des erwähnten Grundprincipes der Mechanik ist es nun ein Leichtes, zu den allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes zu gelangen, in denen alle Probleme der Statik und Dynamik ihre Lösung finden.

II. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeit.

Das dritte Grundgesetz der Mechanik ist das des Bestrebens nach Geschwindigkeit, und findet sich zuerst in den Schriften von Galiläi, nämlich in seinem Traktat della scienza mechanica und in der Anmerkung zum zweiten Satze des dritten Dialoges, als eine Eigenschaft des Gleichgewichtes dargestellt, weßwegen auch Galiläi als Erfinder dieses Principes anzusehen ist.

Man verstand aber unter dem Bestreben nach Geschwindigkeit oder unter dem Begriff der virtuellen Geschwindigkeit dasjenige, was ein Körper, der sich im Gleichgewichte befindet, erhält, wenn

Digitized by Google

dieſes aufgehoben wird, d. h. die Geſchwindigkeit, die er im erſten Augenblicke ſeiner Bewegung wirklich erhält, nachdem er zuvor im Gleichgewichte und im Zuſtande der Ruhe gedacht wird.

Allgemein ausgedrückt iſt das Geſetz des Beſtrebens nach Geſchwindigkeit oder das Geſetz der virtuellen Momente folgendes:

Wenn ein Syſtem von Punkten im Gleichgewichte iſt, und man gibt demſelben eine unendlich kleine Bewegung, vermöge der jeder Angriffspunkt einer Kraft einen unendlich kleinen Weg beſchreibt, der ihr Beſtreben nach Geſchwindigkeit ausdrückt; ſo wird die Summe der Kräfte jede einzeln multiplizirt mit ihrem Beſtreben nach Geſchwindigkeit gemeſſen auf ihrer Richtung, d. h. ſo wird die Summe der virtuellen Momente gleich Null ſeyn.

Johann Bernoulli hat zuerſt die große Allgemeinheit dieſes Satzes dargethan und ihn durch Differentiation der allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht gefunden, denſelben daher immer nur als eine Eigenſchaft des Gleichgewichtes betrachtet.

Lagrange war der erſte, der dieſen Satz, durch deſſen Einfachheit und Allgemeinheit angelockt, zum Grundgeſetze ſeiner Mechanik machte, ohne ihn zu beweiſen. Dieſem Bedürfniſſe ſuchte Lagrange zu begegnen dadurch, daß er ihn durch maſchinenmäſſige Vorrichtungen anſchaulich zu machen ſtrebte.

Wegen Mangel dieſes Beweiſes blieb die Bearbeitung der Mechanik von Lagrange faſt gänzlich iſolirt, indem die nachfolgenden Mathematiker wieder mehr ihre Zuflucht zum Parallelogramm der Kräfte nahmen als einen Grundſatz, deſſen Wahrheit evidenter ſey; aber in jedem Werke der neuern Mechanik, das nicht unbedingt dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeit huldiget, wie Poncelet in allen ſeinen Schriften gethan, findet

Digitized by Google

man die Bemühungen des Autors um den Beweis des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeit, woraus hervorgeht, daß ein solcher bisher nicht existirt.

Wir wollen nun im Nachfolgenden diesen Beweis nicht in synthetischer Form, denn in dieser Weise wird er bei der analytischen Natur der Mechanik vergebens versucht werden, da sich ein solcher nothwendig immer an einen speziellen Fall anlehnen muß, sondern auf dem analytischen Wege herstellen, indem wir ihn als Folgerung unserer Begriffe zu erhalten suchen.

Was wir zu diesem Behufe den gewöhnlichen Vorbegriffen der Mechanik noch beisetzen, besteht im Folgenden:

1) Eine Kraft — ein Stoß oder eine momentane Kraft — kann ihren Angriffspunkt nach allen Richtungen im Raume bewegen, wenn eine solche durch anderweitige Bedingungen festgesetzt ist.
2) Die Größe der Bewegung oder die Geschwindigkeit wird ein Product aus der Größe der Kraft in einen unbestimmten Faktor seyn.
3) Da dieser Faktor von der Richtung der Kraft gegen die Richtung der Bewegung abhängt, so kann er als ein Stück von der Linie der Kraft betrachtet werden.
4) Ein System von Punkten ist im Gleichgewichte, wenn die Summe der Größe der Bewegungen nach jeder beliebigen Richtung hin gleich Null ist.

Mit diesen Voraussetzungen erhalten wir als allgemeine Bedingungsgleichungen der Bewegung:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots\ldots = w$$

worin w ebenfalls ein solches Product vorstellt. Die Faktoren $p_1, p_2, p_3 \ldots$ wollen wir die Thätigkeits-Coefficienten nennen.

Digitized by Google

Eine größere Bewegung oder eine größere Geschwindigkeit kann erzielt werden durch Veränderung dieser Faktoren d. h. durch Veränderung der Wirkungsweise der Kräfte, wodurch wir erhalten:

$$P_1 p_1' + P_2 p_2' + P_3 p_3' \ldots\ldots = w'$$

und daraus geht hervor, daß

$$P_1 (p_1' - p_1) + P_2 (p_2' - p_2) + P_3 (p_3' - p_3) \ldots = w' - w \text{ oder}$$

$$P_1 (dp_1 + \frac{d^2 p_1}{1.2} \ldots\ldots) + P_2 (dp_2 + \frac{d^2 p_2}{1.2} \ldots\ldots) + \ldots\ldots =$$

$$= dw + \frac{d^2 w}{1.2} \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$(P_1 dp_1 + P_2 dp + P_3 dp_3 \ldots) + \frac{P_1 d^2 p_1 + P_2 d^2 p_2}{1.2} + \ldots =$$

$$= dw + \frac{d^2 w}{1.2} \ldots\ldots\ldots$$

Da nun dw eine beliebige Größe ist, so ist

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 \ldots\ldots = dw \text{ d. h.}$$

Um eine Bewegung zu erzeugen, deren Geschwindigkeit das Differential der primitiven Geschwindigkeit ist, hat man als Thätigkeits-Coefficienten die Differentiale der primitiven Coefficienten zu setzen.

Es ist klar, daß für den Zustand des Gleichgewichtes $w = 0$, daher auch $dw = 0$ sey, und die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes wird:

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 \ldots\ldots = 0.$$

Nun nennt man dp_1 die virtuelle Geschwindigkeit von P_1 und $P_1 dp_1$ das virtuelle Moment dieser Kraft, was sie in der That auch sind; denn denkt man sich, daß die beiden ersten Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, so muß mit Rücksicht auf die Zeichen seyn:

Digitized by Google

$$P_1 : P_2 = dp_2 : dp_1 \quad \text{d. h.}$$

Die Geschwindigkeit einer Kraft muß für ein bestimmtes Geschäft um so größer seyn, je kleiner die Größe der Kraft ist.

Obige Gleichung in Worten ausgedrückt heißt:

Im Zustande des Gleichgewichtes von Kräften ist die Summe der virtuellen Momente gleich Null.

Um nun den Thätigkeitsfaktor einer Kraft in einem Systeme zu bestimmen, erinnern wir uns, daß derselbe durch ein Stück der Kraft vorgestellt ist; er ist daher der Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte im Raume, eines constanten und eines veränderlichen. Demnach erhalten wir:

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \quad \text{und}$$

$$dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz \quad \text{oder}$$

$$dp = \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz,$$

und obige Gleichung geht in folgende auseinander:

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 \ldots\ldots = 0$$
$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 \ldots\ldots = 0$$
$$P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 \ldots\ldots = 0.$$

Daraus ist ersichtlich, daß der Thätigkeits-Coefficient einer Kraft in einem Systeme der Cosinus des Winkels, den die Kraft mit der Bewegung bildet, ist.

Ist daher ein System von Kräften im Gleichgewichte, so geben wir demselben, um die virtuellen Geschwindigkeiten zu bestimmen, die beliebige Bewegung dw durch Bildung der Thätigkeits-Coefficienten dp_1, dp_2.... und diese werden die Cosinuse der Winkel seyn, die die Richtungen der Kräfte mit der Richtung der Bewegung bilden. Da aber dw eine beliebige Größe ist, so

Digitized by Google

wird es als Hypotenuse oder Radius des Kreises für genannte Cosinuse gelten, und dp_1, dp_2 ... werden gefunden, indem man von dem Endpunkte der beliebigen Linie dw Perpendikel auf die Richtungen der Kräfte fällt.

Auf diese Weise ist nun mittelst der einfachsten Voraussetzungen die allgemeine Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes für ein beliebiges System von Kräften hergestellt, ihre Bedeutung erklärt, und gezeigt, wie in jedem besondern Falle die virtuellen Geschwindigkeiten oder die virtuellen Momente hergestellt werden.

Der metaphysische Grund dieses Principes des Gleichgewichtes liegt darin, daß die Thätigkeit einer Kraft eine zweifache ist, einerseits einer gewissen Last das Gleichgewicht zu halten, andererseits eine gewisse Geschwindigkeit zu erzeugen, um mit neuen durch die Bewegung sich ergebenden Kräften Gleichgewicht herzustellen, wie es das Gesetz der Trägheit verlangt, wornach während einer jeden Bewegung fortwährend nur Gleichgewicht herrscht; je größer daher der Faktor für das eine Geschäft wird, desto geringer wird der Faktor für die andere Thätigkeit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google